2013 V - 1LM Lineære Modeller.
Vejledende løsning

Opg 1

1+2): u_1 og u_2 er oplagt lineært uafhængige og $u_3 = 2u_1 - 3u_2$. Da er u_1, u_2 en basis for U og $\dim(U) = 2$, og $u_3 = (2,-3)$.

3)
$$Lu_1 = u_2 + u_3 = u_2 + 2u_1 - 3u_2 = 2u_1 - 2u_2$$
Første søjle: $(2,-2)$

$$Lu_2 = Lu_1 - L(u_1 - u_2) = 2u_1 - 2u_2 - (u_1 - u_3)$$
$$= 3u_1 - 5u_2$$

Anden søjle: $(3,-5)$

$$L \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

4) $\det(L) = -4 \neq 0$ så L er invertibel.

5) $Lu_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}$ så

$$\underline{\underline{Lu_3 = (-5, 11)}}.$$

$L^{-1}u_3 = x \iff Lx = u_3$, så vi løser $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Løsningen er $\underline{\underline{x = L^{-1}u_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)}}$

Opg 2

1) $v_i \cdot v_j = 0$ for $i \neq j$ oplagt.

2) Med
$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ og } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$
fås $A = QDQ^{-1} = QDQ^T$, da Q ortogonal.
Så er
$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{3} + \frac{2c}{3} & \frac{a}{3} - \frac{c}{3} & \frac{a}{3} - \frac{c}{3} \\ \frac{a}{3} - \frac{c}{3} & \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{c}{6} & \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + \frac{c}{6} \\ \frac{a}{3} - \frac{c}{3} & \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + \frac{c}{6} & \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{c}{6} \end{pmatrix}$$

3) Erstat a, b og c med $f(a)$, $f(b)$ g $f(c)$, i sp. 2. Det giver $f(A)$.

4) $\det f(A) = \det f(D) = f(a)f(b)f(c)$

5) Da $f(x) = e^x$ er veldefineret for alle $x \in \mathbb{R}$ er e^A veldefineret, og
$$\det e^A = e^a e^b e^c = e^{a+b+c} \neq 0$$
hvorfor e^A er invertibel.

Opg 3

1) $$\int \cos^2(3x)\sin^2(2x)\,dx = -\frac{1}{16}\int \left(e^{i6x}+e^{-i6x}+2\right)\left(e^{i4x}+e^{-i4x}-2\right)dx$$

$$= -\frac{1}{16}\int \Big(e^{i10x}+e^{i2x}-2e^{i6x}+e^{-i2x}+e^{-i10x}-2e^{-i6x}$$
$$+\,2e^{i4x}+2e^{-i4x}-4\Big)\,dx$$

$$= -\frac{1}{16}\int \left(e^{i10x}+e^{-i10x}\right)-2\left(e^{i6x}+e^{-i6x}\right)$$
$$+\,2\left(e^{i4x}+e^{-i4x}\right)+\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)-4\,dx$$

$$= -\frac{1}{8}\int \Big(\cos(10x)-2\cos(6x)+2\cos(4x)+\cos(2x)$$
$$-2\Big)\,dx$$

$$= -\frac{1}{8}\Big(\frac{1}{10}\sin(10x)-\frac{2}{6}\sin(6x)+\frac{2}{4}\sin(4x)$$
$$+\,\frac{1}{2}\sin(2x)-2x\Big)+k$$

$$= -\frac{1}{80}\sin(10x)+\frac{1}{24}\sin(6x)-\frac{1}{16}\sin(4x)-\frac{1}{16}\sin(2x)$$
$$+\,\frac{1}{4}x+k$$

2) $$2z^4-8z^3+10z^2 = z^2\left(2z^2-8z+10\right)=0$$

$z=0$ eller $z = \dfrac{8\pm i\sqrt{16}}{4} = \underline{\underline{2\pm i}}$

Opg 4

1) f er veldefineret for $\left|\frac{x^2-1}{2}\right| < 1$, dvs.

$$\underline{\underline{-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}}}.$$

2)

$$f(x) = \frac{1}{1-\frac{x^2-1}{2}} = \frac{2}{3-x^2}, \text{ for } x \in]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[.$$

3)

$\frac{x^2-1}{2}$ har minimum i $x=0$, hvorfor

$f(0) = \frac{2}{3}$ er minimum for f.

Da $\frac{x^2-1}{2}$ ~~har~~ har monotoniintervallerne

$]-\sqrt{3}, 0]$ aftagende, $[0, \sqrt{3}[$ voksende

og er kontinuert, ~~er f kontinuert~~ er

f ikke injektiv. Da $\lim_{x \to \pm\sqrt{3}} f(x) = \infty$

er værdimængden $[\frac{2}{3}, \infty[$

4)

$$\frac{2}{3-x^2} = y \iff 2 = 3y - x^2 y \iff$$

$$x^2 = \frac{3y-2}{y}, \text{ idet } \underline{\underline{y \geq \frac{2}{3} > 0.}}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3y-2}{y}}$$